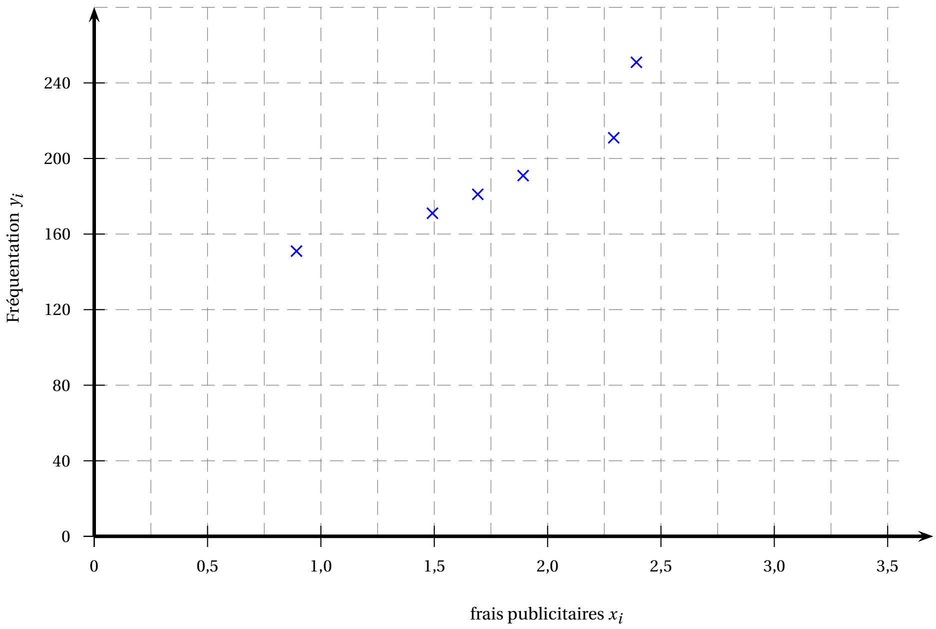
Corrigé du baccalauréat STMG Pondichéry
25 avril 2017

EXERCICE 1 **(3 points)**

Le service marketing d'un centre commercial veut évaluer l'impact des frais engagés en publicité, par mois, sur le nombre de clients.
Pour cela, ce service s'appuie sur les données ci-dessous, relevées sur une période de 6 mois :

Frais publicitaires x_i (en milliers d'euros)	1,9	2,4	1,5	0,9	2,3	1,7
Fréquentation y_i (en milliers de clients)	190	250	170	150	210	180

Le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) est représenté ci-dessous.



1. À l'aide de la calculatrice une équation de la droite réalisant un ajustement affine de ce nuage de points, obtenue par la méthode des moindres carrés est, les coefficients étant arrondis au centième, $y = 58{,}34x + 87{,}62$.
2. On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite d'équation $y = 58,3x + 87,6$.
   a. On estime alors que pour 4 000 euros de frais publicitaires engagés, la fréquentation s'élèverait à 321 000 clients. Pour vérifier la cohérence de l'estimation annoncée, calculons selon ce modèle, la fréquentation attendue lorsque $x = 4$. $y = 58{,}3 \times 4 + 87{,}6 = 320{,}8$.

   La fréquentation attendue étant de 320 800 lorsque les frais publicitaires s'élèvent à 4 000 euros, nous pouvons affirmer que les résultats sont cohérents.

   b. Déterminons le montant des frais publicitaires devant être engagés pour espérer 400 000 clients au cours d'un mois. Déterminons l'abscisse du point de la droite d'ordonnée 400. Résolvons

   $400 = 58{,}3x + 87{,}6 \quad x = \dfrac{400 - 87{,}6}{58{,}3} \approx 5{,}358$.

   Le montant des frais publicitaires, arrondi à la centaine d'euros, devant être engagés pour espérer 400 000 clients au cours d'un mois est de 5 400 euros.

   c. Le centre commercial décide d'engager 5 000 euros pour la campagne publicitaire du prochain mois. Lors du bilan, on dénombre 330 000 clients ayant fréquenté le site au cours de ce mois.

   Calculons, selon ce modèle, le nombre de clients attendus. $y = 58{,}3 \times 5 + 87{,}6 = 379{,}1$.

   Selon ce modèle, pour des frais publicitaires de 5 000 euros, le centre commercial aurait dû avoir une fréquentation de 379 100 personnes.

   Nous pouvons analyser ce résultat de différentes façons :

   — Le modèle n'est pas adapté ;

   — Le modèle est adapté, la campagne est alors peu efficace ou il y a une saturation de la fréquentation.

EXERCICE 2 **(5 points)**

Le diabète de type 1 est une maladie qui apparaît le plus souvent durant l'enfance ou l'adolescence. Les individus atteints par cette maladie produisent très peu ou pas du tout d'insuline, hormone essentielle pour l'absorption du glucose sanguin par l'organisme.

En 2016, 542 000 enfants dans le monde étaient atteints de diabète de type 1. Des études récentes permettent de supposer que le nombre d'enfants diabétiques va augmenter de 3 % par an à partir de 2016. On note u_n le nombre d'enfants diabétiques dans le monde pour l'année $(2016+n)$. Ainsi $u_0 = 542\,000$.

1. Étude de la suite (u_n) :

a. Calculons u_1 .
À un taux d'évolution de 3 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,03.
$u_1 = 542\,000 \times 1,03 = 558\,260$

b. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,03 puisque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par 1,03.

c. Pour tout entier naturel n, exprimons u_n en fonction de n.
Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$.
$u_n = 542\,000(1,03)^n$

d. La feuille de calcul ci-dessous, extraite d'un tableur, permet de calculer les termes de la suite (u_n). Les cellules de la colonne C sont au format « nombre à zéro décimale ». Une formule, saisie dans la cellule C3 puis recopiée vers le bas, permettant d'obtenir les valeurs de la colonne C est =$C2*1,03 ou =C2*1,03

	A	B	C
1	Année	n	u_n
2	2016	0	542 000
3	2017	1	
...	...	...	...

2. Calculons le nombre d'enfants atteints de diabète de type 1 dans le monde en 2021.
En 2021, $n = 5$ d'où $u_5 = 542\,000 \times 1,03^5 \approx 628\,327$.
Nous pouvons prévoir, selon ce modèle, environ 628 327enfants atteints de diabète de type 1 en 2021.

3. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	U prend la valeur 542 000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que U<625 000
	U prend la valeur $1,03 \times U$
	N prend la valeur $N+1$
	Fin Tant que

a. Complétons le tableau ci-dessous. *Les valeurs de U sont arrondies à l'unité.*

U	542 000	558 260	575 008	592 258	610 026	628 327
N	0	1	2	3	4	5
$U < 625\,000$?	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

b. Cet algorithme permet de calculer, dans le contexte de l'exercice, le nombre d'années depuis 2016 qu'il faudrait pour que le nombre d'enfants dans le monde atteints de diabète de type 1 dépasse 625 000.

EXERCICE 3 **(6 points)**

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Partie A : Lectures graphiques

À l'aide du graphique donné ci-dessous, répondons aux questions suivantes :

1. Le montant des charges pour 5 pièces produites par jour est d'environ 1 500 euros. Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe représentative de C d'abscisse 5.

2. Pour connaître combien de pièces sont produites par jour pour un montant des charges de 2 000 euros, nous traçons la droite d'équation $y = 2000$ et nous lisons l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe représentative de C.

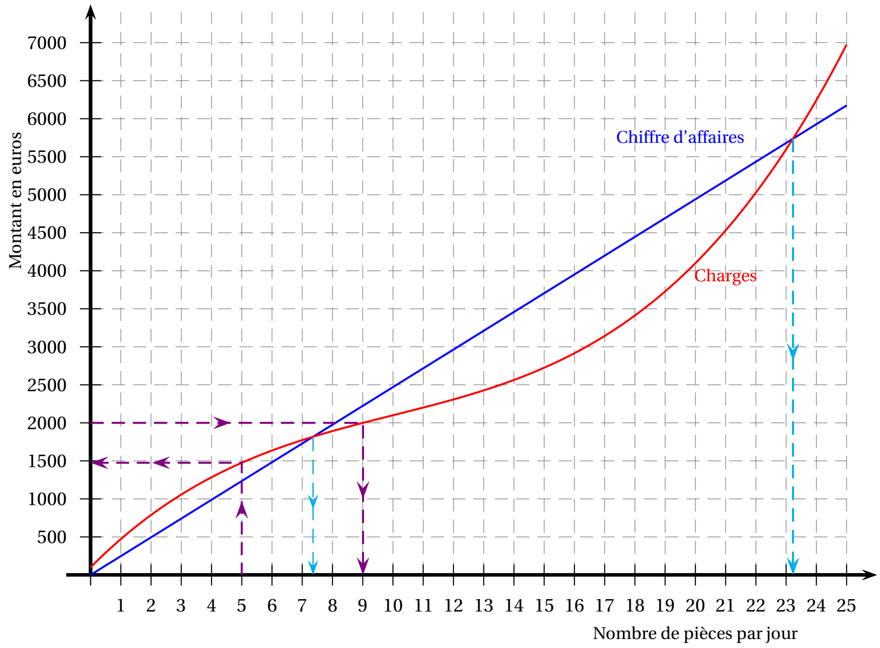
Avec la précision permise par le graphique, nous obtenons 9.

La production de 9 pièces entraîne un coût d'environ 2 000 euros.

3. Les quantités produites par jour permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice sont les valeurs pour lesquelles la courbe représentant la recette est « au-dessus » de celle représentant les coûts c'est-à-dire les valeurs comprises entre les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de C et celle représentant la recette.

Nous lisons les abscisses des points d'intersection environ 7,4 et 23,2.

Par conséquent, l'entreprise réalise un bénéfice lorsque les quantités produites appartiennent à l'intervalle $[8\,;\,23]$.



Partie B : Étude du bénéfice

Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,25]$ par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100.$$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. Le bénéfice étant égal à la différence entre les recettes et les coûts, nous avons donc $B(x) = 247x - C(x)$.

$B(x) = 247x - (x^3 - 30x^2 + 400x + 100) = -x^3 + 30x^2 + (247 - 400)x - 100$

L'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,25]$ est bien : $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$.

2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.

Calculons $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,25]$.

$B'(x) = -(3x^2) + 30(2x) - 153 = -3x^2 + 60x - 153$

3. Justifions le tableau suivant :

x	0		3		17		25
signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Étudions le signe de $B'(x)$.
Calculons Δ ; $\Delta = 60^2 - 4 \times (-3) \times (-153) = 1764 = 42^2$.
$\Delta > 0$ Le trinôme a donc deux racines $x_2 = \dfrac{-60-42}{-6} = 17 \quad x_1 = \dfrac{-60+42}{-6} = 3$.
$\Delta > 0$ Le trinôme est du signe de a $(a = -3)$ pour tout $x \in]-\infty\,;\, x_1[\cup]x_2\,;\,+\infty[$ et du signe de $(-a)$ $(-a = 3)$ pour tout $x \in]x_1\,;\, x_2[$, d'où le tableau.

4. Étudions les variations de B.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I
$B'(x) > 0$ sur $]3\,;\,17[$ par conséquent B est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I
$B'(x) < 0$ sur $]0\,;\,3[$ ou sur $]17\,;\,25]$ par conséquent la fonction B est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.
Dressons le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,25]$.

x	0		3		17		25
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de B	-100	$\searrow$	-316	$\nearrow$	1 056	$\searrow$	-800

5. Le nombre de pièces que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal est 17, la fonction B admettant en 17 un maximum local. Ce bénéfice maximal vaut alors 1 056 euros.

Partie C : Coût moyen

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0\,;\,25]$ par $C_M = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. $C_M(x) = \dfrac{x^3 - 30x^2 + 400x + 100}{x} = x^2 - 30x + 400 + \dfrac{100}{x}$. Calculons :
$C_M(16) = 16^2 - 30 \times 16 + 400 + \dfrac{100}{16} = 182{,}25$
$C_M(17) \approx 184{,}88$
les résultats sont donnés à 10^{-2} *près.*

2. On donne le tableau de variations de la fonction C_M :

x	0		15,2		25
$C_M(x)$	$\|\|$	$\searrow$	181,6	$\nearrow$	279

L'affirmation suivante « *Lorsque le bénéfice de l'entreprise augmente, le coût moyen diminue* » est fausse.
Le bénéfice de l'entreprise augmente sur $[15{,}2\,;\,17]$. Il en est ainsi aussi du coût moyen.

EXERCICE 4 **(6 points)**

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

On s'intéresse au nombre de dons de sang lors de collectes organisées au sein de l'Établissement Français du Sang (EFS) depuis 2010.

Année	2010	2011	2012	2013	2014
Nombre de dons de sang (en milliers)	2 473	2 586	2 612	2 589	2 547

Source : site de l'EFS

1. Déterminons à 0,01 % près, le pourcentage d'augmentation de dons de sang entre 2010 et 2014.
Le taux d'évolution $\mathcal{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.
$\mathcal{T} = \dfrac{2\,547 - 2\,473}{2\,473} \approx 0{,}029\,92$.
Le pourcentage d'augmentation de dons de sang entre 2010 et 2014, arrondi à 0,01 % près est 2,99 %.

2. Montrons que l'augmentation annuelle moyenne entre 2010 et 2014 est de 0,74 % arrondie à 0,01 % .
En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^4$ puisque le nombre de dons du sang a subi 4 évolutions durant cette période.
$(1+t_m)^4 = \dfrac{2\,547}{2\,473} \approx 1{,}029\,92$ par conséquent $t_m = 1{,}029\,92^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0{,}007\,398\,3$.
Le taux annuel moyen d'évolution du nombre de dons du sang entre 2010 et 2014, arrondi à 0,01 %, est bien égal à 0,74 %.

3. En supposant que l'augmentation du nombre de dons suivra la même évolution, calculons le nombre de dons de sang que l'EFS peut espérer collecter en 2017.
Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 0,0074 est 1,0074. Entre 2014 et 2017, il y a eu 3 évolutions. $2\,547 \times 1{,}007\,4^3 \approx 2\,603{,}962\,9$.
Le nombre de dons de sang que l'EFS peut espérer collecter en 2017, arrondi au millier, est 2 604 000.

Partie B

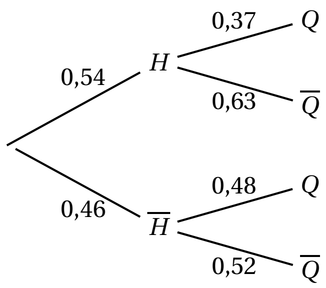
Dans une région, 54 % des donneurs sont des hommes.
Parmi eux, 37 % ont moins de 40 ans.
Parmi les femmes donnant leur sang, 48 % ont moins de 40 ans.
On interroge au hasard un donneur de sang dans cette région et on considère les événements suivants :

- H : « la personne interrogée est un homme »
- Q : « la personne interrogée a moins de 40 ans ».

$\overline{H}$ désigne l'événement contraire de H et $P_H(Q)$ la probabilité de Q sachant H.

1. À l'aide de l'énoncé,
$P(H) = 0{,}54$ car 54 % des donneurs sont des hommes
$P_H(Q) = 0{,}37$ car parmi eux, 37 % ont moins de 40 ans.

2. Complétons l'arbre pondéré ci-contre.



3. Calculons $P(H \cap Q)$.
$P(H \cap Q) = p(H) \times P_H(Q) = 0{,}54 \times 0{,}37 = 0{,}199\,8$
La probabilité que la personne interrogée soit un homme de moins de quarante ans est 0,199 8.

4. Démontrons que la probabilité que la personne interrogée ait moins de 40 ans est 0,4206.
$P(Q) = P(H \cap Q) + P(\overline{H} \cap Q) = p(H) \times P_H(Q) + p(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(Q) = 0{,}199\,8 + 0{,}46 \times 0{,}48 = 0{,}420\,6$

5. La personne interrogée a plus de 40 ans. La probabilité que ce soit un homme est notée $P_{\overline{Q}}(H)$.
$P_{\overline{Q}}(H) = \dfrac{P(H \cap \overline{Q})}{P(\overline{Q})} = \dfrac{0{,}54 \times 0{,}63}{1 - 0{,}420\,6} \approx 0{,}587\,159$.
La probabilité, arrondie à 10^{-4} que la personne interrogée soit un homme sachant qu'elle a plus de quarante ans est 0,587 2.

Partie C

L'EFS affirme que dans une région donnée : « 23 % de la population donne son sang au moins une fois par an ».
On interroge au hasard un échantillon de 1 000 personnes habitant cette région. Parmi elles, 254 ont donné au moins une fois leur sang au cours de la dernière année.
L'EFS fait l'hypothèse qu'une proportion de 0,23 de la population donne son sang au moins une fois par an ».
Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique au niveau de confiance de 0,95 de la fréquence de personnes donnant leur sang pour un échantillon de taille 1 000.

$$\left[0{,}23 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\ ,\ 0{,}23 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0{,}198\,4\ ;\ 0{,}261\,6]$$

Parmi elles, 254 ont donné au moins une fois leur sang au cours de la dernière année.
La fréquence constatée de 0,240 appartient à l'intervalle de fluctuation donc on peut considérer que l'hypothèse selon laquelle il y a 23 % de personnes donnant leur sang ne permet pas mettre en doute l'affirmation de l'EFS.