Test TSTMG 23 novembre 2018.

Nom, prénom : ……………………………………………………

Une entreprise produit des tablettes tactiles avec un maximum de production de 30 000 unités par mois.
Soit x le nombre de milliers de tablettes produites.
Le coût de production en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ par :

$$C(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 22x^2 + 96x.$$

Chaque tablette est vendue 480 euros et on suppose que l'entreprise écoule toute sa production mensuelle. On souhaite étudier la rentabilité de cette entreprise.
La représentation graphique de la fonction C est donnée dans **l'annexe à rendre avec la copie**.

Partie A Lecture graphique

1. Déterminer, par lecture graphique, le coût de production en milliers d'euros de 10 milliers de tablettes.
   Laisser apparents les traits de construction sur l'annexe.
2. Déterminer, par lecture graphique, pour combien de tablettes produites, le coût sera supérieur à 8 000 milliers d'euros.
   Laisser apparents les traits de construction sur l'annexe.
3. La fonction R définie par $R(x) = 480x$ représente la recette en milliers d'euros pour x milliers de tablettes produites.
   Tracer dans le repère de **l'annexe à rendre avec la copie** sa courbe représentative.

Partie B Étude du bénéfice

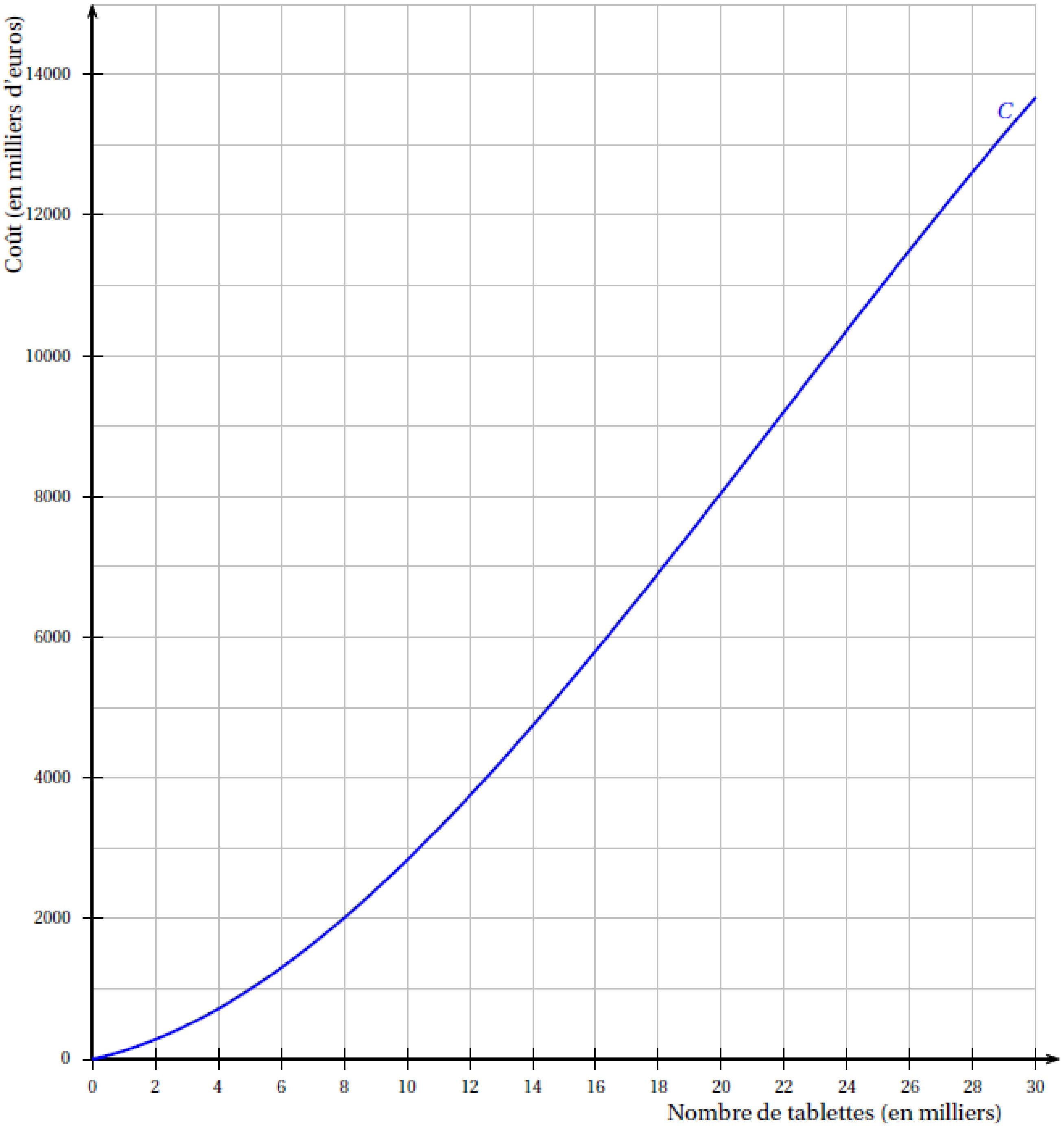
1. Montrer que le bénéfice de l'entreprise sera alors donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ par :

$$B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 22x^2 + 384x.$$

2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Calculer $B'(x)$.
3. **a.** Résoudre l'équation du second degré $x^2 - 44x + 384 = 0$.
   b. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,30]$. Dresser le tableau de variation de la fonction B.
4. Donner la production à réaliser pour obtenir le bénéfice maximal et la valeur de ce bénéfice.

Annexe (à rendre avec la copie)

Nom, prénom : ………………………………………………



Eléments de correction (Nouvelle Calédonie 16 Novembre 2016)

Partie A Lecture graphique

1. Avec la précision permise par le graphique, le coût de production en milliers d'euros de 10 milliers de tablettes est d'environ 2 800 milliers d'euros. Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 10.

2. Avec la précision permise par le graphique, le coût sera supérieur à 8 000 milliers d'euros pour un nombre de tablettes produites comprises entre 20 et 30. L'intervalle est déterminé à partir de l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = 8000$. Nous avons lu environ 20.

3. La fonction R définie par $R(x) = 480x$ représente la recette en milliers d'euros pour x milliers de tablettes produites.

   Sa courbe représentative est tracée dans le repère de **l'annexe à rendre avec la copie** .

Partie B Étude du bénéfice

1. Calculons le bénéfice de l'entreprise. Le bénéfice étant la différence entre les recettes et les coûts, nous obtenons donc

   $B(x) = R(x) - C(x) = 480x - \left(-\frac{1}{3}x^3 + 22x^2 + 96x\right) = \frac{1}{3}x^3 - 22x^2 + (480-96)x =$

   $\frac{1}{3}x^3 - 22x^2 + 384x.$

   Le bénéfice de l'entreprise est bien donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;\ 30]$ par : $B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 22x^2 + 384x$.

2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Déterminons $B'(x)$ sur l'intervalle $[0;\ 30]$.

   $B'(x) = \frac{1}{3}(3x^2) - 22(2x) + 384 = x^2 - 44x + 384.$

3. **a.** Résolvons l'équation du second degré $x^2 - 44x + 384 = 0$.

   Calculons le discriminant Δ. $\Delta = (-44)^2 - 4 \times 1 \times 384 = 400 = 20^2$.

   Δ étant positif, le trinôme admet deux racines

   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \frac{44-20}{2} = 12$

   $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{44+20}{2} = 32$

   L'ensemble solution de l'équation est $\{12 ; 32\}$.

   Nous pouvons alors écrire $x^2 - 44x + 384 = (x-12)(x-32)$.

b. Déterminons le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 30]$.

x	0		12		30
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
		signe de a		signe contraire de a	

Étudions le sens de variation de B.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Sur $[0~;~12[$, $B'(x) > 0$ par conséquent B est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Sur $]12~;~30]$, $B'(x) < 0$ par conséquent B est strictement décroissante sur cet intervalle.
Dressons maintenant le tableau de variation de B sur $[0~;~30]$.

x	0		12		30
B'		+	0	−	
Variation de B	0	↗	2016	↘	720

4. La production à réaliser pour obtenir le bénéfice maximal est de 12 000 tablettes par mois.
La valeur de ce bénéfice s'élèverait alors à 2 016 milliers d'euros.

Annexe (à rendre avec la copie).