Test1 TSTMG fonctions rationnelles

Exercice 1.

On s'intéresse à la consommation d'un véhicule roulant aux biocarburants en fonction de la vitesse de ce véhicule.
Cette consommation est modélisée par la fonction f définie sur $[30;130]$ par :

$$f(x)=\frac{8x^2-800x+30000}{x^2} \quad \text{pour } x \text{ dans } [30\,;\,130]$$

où x est exprimé en km/h et $f(x)$ est exprimé en litres pour 100 km.

1. Suivant ce modèle, lorsque le véhicule roule à 30 km/h, quelle est sa consommation ?
   Et lorsqu'il roule à 50 km/h ?
2. Montrer que la dérivée f' de f sur $[30;130]$ peut s'écrire $f'(x)=\dfrac{800x-60000}{x^3}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[30;130]$ et en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. ~~Pour quelle vitesse la consommation est-elle minimale ?~~
   ~~Que vaut alors cette consommation (arrondir à 0,01 près) ?~~
5. On considère l'algorithme ci-dessous :

$x \leftarrow 30$
$y \leftarrow \dfrac{44}{3}$
Tant que $y \geqslant 4$
  $x \leftarrow x+1$
  $y \leftarrow \dfrac{8x^2-800x+30000}{x^2}$
Fin Tant que

Quelle est la valeur de la variable x à la fin de l'exécution de l'algorithme ? En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2

Une entreprise qui connaît des difficultés économiques souhaite réaliser des prévisions de son chiffre d'affaires mensuel pour l'année 2018.

Cette entreprise a la possibilité de bénéficier d'une aide de l'État.
Avec cette aide, on modélise le chiffre d'affaires mensuel en millions d'euros par la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,12]$ par

$$f(x)=\frac{15x+20}{x}.$$

Ainsi, $f(1)$ désigne le chiffre d'affaires du mois de janvier, $f(2)$ désigne le chiffre d'affaires du mois de février, etc.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   Donner le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,12]$. et dresser le tableau de variation de la fonction f
2. Montrer qu'avec ce modèle, le chiffre d'affaires mensuel restera supérieur à 15 millions d'euros durant l'année 2018.

Test1 Eléments de correction.

Exercice 1. Polynésie Juin 2018 Ex4.

1. Suivant ce modèle, lorsque le véhicule roule à 30 km/h, sa consommation est $f(30)$.
   $f(30) = \dfrac{44}{3} \approx 14,67$.
   Sa consommation lorsqu'il roule à 50 km/h est $f(50)$. $f(50) = 4$.

2. Montrons que la dérivée f' de f sur $[30; 130]$ peut s'écrire $f'(x) = \dfrac{800x - 60000}{x^3}$.
   $$f'(x) = \frac{(8(2x) - 800)x^2 - 2x(8x^2 - 800x + 30000)}{x^4} = \frac{x(16x^2 - 800x - 16x^2 + 1600x - 60000)}{x^4}$$
   $f'(x) = \dfrac{800x - 60000}{x^3}$. Nous obtenons bien le résultat attendu.

3. Étudions le signe de $f'(x)$ sur $[30; 130]$
   $x \in [30 ; 130]$ par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $800x - 60000$ ou de $x - 75$
   Sur $\mathbb{R}$, $x - 75 > 0 \iff x > 75$. Il en résulte
   si $x \in [30 ; 75[$, $f'(x) < 0$ et si $x \in]75 ; 130]$, $f'(x) > 0$
   Étudions le sens de variation de f.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
   Sur $[30 ; 75[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
   Sur $]75 ; 130[$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
   Dressons le tableau de variation de f sur cet intervalle :

La valeur de la variable x à la fin de l'exécution de l'algorithme est 51. Nous avons montré que la consommation pour $x = 50$ était de 4 litres pour 100 km et que sur $[30; 75[$, la fonction était décroissante par conséquent l'algorithme s'arrêtera juste après 50 donc à 51. Une interprétation dans le contexte de l'exercice est que la consommation sera strictement inférieure à 4 litres aux 100 kilomètres lorsque la vitesse sera supérieure à 51 km/h.

Exercice 2. Polynésie sept 2017 Ex4

1. Déterminons l'expression de $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   f est de la forme $\frac{u}{v}$ par conséquent $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
   $u(x) = 15x + 20 \quad u'(x) = 15 \qquad v(x) = x \quad v'(x) = 1$ d'où $f'(x) = \dfrac{15x - (15x + 20)}{x^2} = -\dfrac{20}{x^2}$
   Sur l'intervalle $[1; 12]$, $f'(x) < 0$ comme quotient d'un nombre réel strictement négatif et d'un nombre réel strictement positif.
   Nous pouvons en déduire que la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle .
2. Avec ce modèle, le chiffre d'affaires mensuel restera supérieur à 15 millions d'euros durant l'année 2018.En effet sur $[1; 12]$ $f(x) - 15 = \dfrac{20}{x}$ or sur $[1; 12]$ $\dfrac{20}{x} > 0$ par conséquent $f(x) - 15 > 0$ ce qui entraîne $f(x) > 15$.

Test2 TSTMG fonctions rationnelles

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ par

$$f(x)=\frac{20x+21}{x^2+1}.$$

1. Montrer que la dérivée f' de f sur [1 ;15] peut s'écrire :

$$f'(x)=\frac{-20x^2-42x+20}{\left(x^2+1\right)^2}$$

2. Etudier le signe de f' sur [1; 15] et en déduire le tableau de variations de f sur ce même intervalle.

3. Quel est l'extremum de la fonction f sur [1; 15] ?

4. On considère l'algorithme ci-dessous :

$x \leftarrow 1$

$y \leftarrow 20{,}5$

$Tant\ que\ y > 1{,}7$

  $x \leftarrow x+1$

  $y \leftarrow \dfrac{20x+21}{x^2+1}$

$Fin\ Tant\ que$

Quelle est la valeur de x à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

Exercice 2.

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[4\,;\,16]$ par :

$$f(x)=-x+20-\frac{64}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[4\,;\,16]$, on a :

$$f'(x)=\frac{64-x^2}{x^2}.$$

2. Etudier le signe de f' sur [4; 16].

3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle [4 ; 16].

Test2 Eléments de correction.

Exercice 1.Polynésie, septembre 2015

1. Démontrons que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;15]$. Pour ce faire, étudions le signe de $f'(x)$. Le dénominateur étant strictement positif, étudions alors le signe du numérateur. Celui-ci étant un trinôme du second degré, calculons le discriminant.
$\Delta = (-42)^2 - 4 \times (-20) \times 20) = 3364 = (58)^2$
Calculons maintenant les racines du trinôme : $x_1 = \dfrac{42+58}{-40} = -\dfrac{5}{2}$ $\quad x_2 = \dfrac{42-58}{-40} = \dfrac{2}{5}$.
Le signe du trinôme est celui de a $(a = -20)$ sur $]-\infty\,,\ x_1[\cup]x_2\,;\ +\infty[$. $\dfrac{2}{5} < 1$ par conséquent sur $[1\,;15]$, $f'(x) < 0$.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Pour tout x appartenant à $[1;\ 15]$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur cet intervalle

3. Minimum=1,4203 rencontré pour x=15

4. X=13

Exercice 2. Métropole sept 2014 Ex4.

1. Déterminons $f'(x)$. $f'(x) = -1 - 64\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = \dfrac{-x^2+64}{x^2}$. Par conséquent pour tout x de l'intervalle $[4\,;\,16]$, nous avons bien : $f'(x) = \dfrac{64-x^2}{x^2}$.
2. **a.** Étudions le signe de $64 - x^2$.
$64 - x^2 = (8+x)(8-x)$. $\dfrac{x+8}{x^2}$ est strictement positif sur l'intervalle $[4\,;16]$, par conséquent $f'x)$ est du signe de $8 - x$.
Sur $\mathbb{R}$, $8 - x > 0 \iff x < 8$.
Il en résulte que le tableau de signes de f' sur l'intervalle $[4\,;16]$ est :

b. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Sur $]8\,;\,16]$, $f'(x) < 0$ par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Sur $[4\,;\,8[$, $f'(x) > 0$, par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;16]$

x	4		8		16
$f'(x)$		+	0	−	
Variation de f	0	↗	4	↘	0