DS TSTMG 9 avril 2019

Nom, prénom : ……………………………………………………………………

Exercice 1

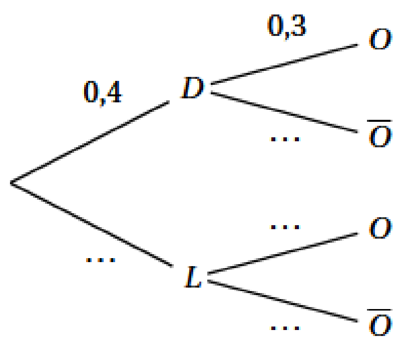
Cet exercice est composé de deux parties indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Un conservatoire de musique propose deux parcours à ses élèves : un parcours diplômant et un parcours loisir. On observe que 40 % des élèves choisissent le parcours diplômant. Parmi ceux qui ont sélectionné le parcours diplômant, 30 % choisissent de faire partie d'un orchestre. Parmi les élèves ayant choisi le parcours loisir, 25 % choisissent de faire partie d'un orchestre.
On sélectionne un élève de ce conservatoire au hasard.
On note :

- D l'évènement : « L'élève sélectionné a choisi le parcours diplômant. »
- L l'évènement : « L'élève sélectionné a choisi le parcours loisir. »
- O l'évènement : « L'élève sélectionné a choisi de faire partie d'un orchestre. »

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. Définir par une phrase l'évènement $D \cap O$ et calculer sa probabilité.
3. Déterminer la probabilité de l'évènement O.
4. On choisit au hasard un élève faisant partie d'un orchestre. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il suive un parcours diplômant ?

Partie B

Pour le concert de fin d'année, l'auditorium du conservatoire dispose de 400 places réservées aux parents d'élèves. On s'intéresse au nombre X de parents d'élèves assistant au concert de fin d'année dans l'auditorium.
On estime à 0,75 la probabilité que chacun des 500 parents d'élèves assiste au concert. On admet que X suit la loi binomiale de paramètres 500 et 0,75.

1. Calculer l'espérance de X.
2. Calculer la probabilité que 150 parents assistent au concert (donner le résulat en écriture scientifique pour les questions 2 et 3).
3. Calculer la probabilité qu'au plus 150 parents assistent au concert.
4. Déterminer la probabilité que le nombre de places réservées aux parents d'élèves soit suffisant (arrondir au millième).

Tourner la page SVP

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-3}{1+x^2}$ et $\mathscr{C}$ est la courbe représentant f dans un repère orthonormé du plan.

1. **Justifier** par un calcul détaillé que $f'(x)=\dfrac{6x}{\left(1+x^2\right)^2}$.
2. **Etudier** le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
3. **Etablir** le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. **Déterminer** l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1.

Exercice 3.

Soit la fonction f définie sur [-1; 5] par

$$f(x)=\frac{2x-3}{x+2}.$$

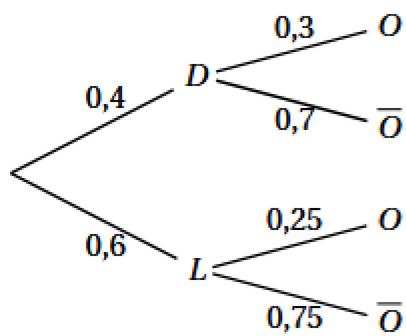
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f'
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) A l'aide de la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f et résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$ (justifiez votre réponse). Puis vérifier cette réponse par le calcul.

Eléments de correction

Exercice 1. (Ex1 STMG Métropole–La Réunion 7 septembre 2015).

Partie A

1. Complétons l'arbre de probabilité suivant :



2. $D \cap O$ est l'événement : « l'élève sélectionné a choisi le parcours diplômant et de faire partie d'un orchestre ». $p(D \cap O) = p(D) \times p_D(O) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$.

3. Déterminons la probabilité de l'évènement O.

$p(O) = p(D) \times p_D(O) + p(L) \times p_L(O) = 0{,}12 + 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}27$.

4. On choisit au hasard un élève faisant partie d'un orchestre. La probabilité qu'il suive un parcours diplômant est notée $p_O(D)$.

$p_O(D) = \dfrac{p(D \cap O)}{p(O)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}27} = 0{,}444$, *arrondie au millième.*

PARTIE B

1. X suivant une loi binomiale de paramètres (n, p) où $n = 500$ et $p = 0{,}75$, l'espérance de X est np.

$E(X) = 500 \times 0{,}75 = 375$.

2. $P(X = 150) = 5.9667 \times 10^{-99}$

3. $p(X \leq 150) = 6.956 \times 10^{-99}$

4.

Déterminons la probabilité que le nombre de places réservées aux parents d'élèves soit suffisant.

Pour que le nombre de places soit suffisant, il suffit qu'au plus 400 parents viennent.

$p(X \leqslant 400) = 0{,}996$ *arrondie au millième.*

Exercice 2.

1. $f(x)=\dfrac{-3}{1+x^2}$: Avec $u(x)=-3$ et $v(x)=1+x^2$ alors $u'(x)=0$ et $v'(x)=2x$.

$$f'(x)=\frac{0\times(1+x^2)-(-3)\times 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{6x}{(1+x^2)^2}.$$

2. Sur $\mathbb{R}$, $(1+x^2)^2>0$ et $6x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$	
$(1+x^2)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. Comme $f(0)=\dfrac{-3}{1+0^2}=-3$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

Exercice 3.

1) $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=2x-3 \to u'(x)=2$

$v(x)=x+2 \to v'(x)=1$

Donc :

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$=\frac{2\times(x+2)-(2x-3)\times 1}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{2x+4-2x+3}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

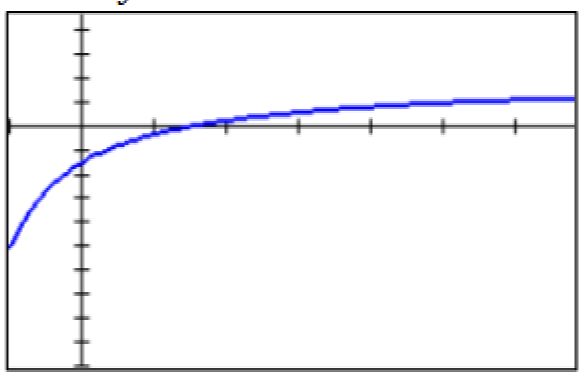
2) Or, un carré étant toujours positif, $(x+2)^2 \geq 0$ et donc $f'(x) > 0$.

3) On dresse alors le tableau de variations :

x	-1	5
f'	+	
f	-5 ↗	1

4)

On trace la courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice :



La solution de l'équation $f(x)=0$ se lit graphiquement en regardant l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. On trouve : $x = 1{,}5$.

Vérifions par calcul :

$$f(x) = 0$$

$$\frac{2x-3}{x+2} = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} = 1{,}5$$