Chapitre V Fonctions de référence (extrait)

Fonctions de référence Fonctions de référence : - fonctions affines ; - fonctions polynômes de degré 2 ; - fonctions logarithme népérien et exponentielle de base e. Dérivée des fonctions de référence.	• Représenter une fonction de référence et exploiter cette courbe pour retrouver des propriétés de la fonction.	La notion de limite n'est pas au programme.

I Fonctions affines

Voir cours déjà distribué

II Fonctions polynômes de degré 2

Voir cours déjà distribué

III Fonction exponentielle de base e

Voir cours déjà distribué

Voir les Savoir-Faire : 1 Résoudre des équations avec des puissances, 2 Exprimer sous la forme d'une seule puissance d'un nombre, 3 Utiliser les propriétés de la fonction exponentielle, 4 Etudier les variations d'une fonction utilisant la fonction exponentielle, 5 Dériver une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle, 6 Etudier une fonction de la forme e^u, *7 Dresser le tableau de variation d'une fonction de la forme* e^u.

IV Fonction logarithme népérien

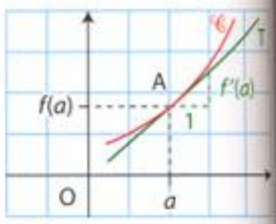
Voir cours déjà distribué

Voir les Savoir-Faire : 8 Résoudre des équations avec ln, 9 Résoudre une équation ou une inéquation avec ln (et relation fonctionnelle), 10 Etude d'une fonction utilisant ln.

V Dérivation : nombre dérivé, fonction dérivée, tangente, sens de variation.

Tangente à la courbe d'une fonction

DÉFINITION – PROPRIÉTÉ f est une fonction dérivable en a de I.
Dans un repère, **la tangente** à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f au point A d'abscisse a est la droite T qui passe par A et de coefficient directeur $f'(a)$.
Une équation de T est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.



Sens de variation et extremum local

PROPRIÉTÉS f est une fonction dérivable sur I.

- Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) > 0$ sauf peut être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.
- Si pour tout nombre réel de x de I, $f'(x) < 0$ sauf peut être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est **strictement décroissante** sur I.

PROPRIÉTÉ f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et x_0 est un nombre réel de I.
Si $f(x_0)$ est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque : La réciproque est fausse. En effet, si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(0) = 0$ et pourtant $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local de f.

PROPRIÉTÉ f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et x_0 est un nombre réel de I.
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

x		x_0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

$f(x_0)$ est un minimum local.

x		x_0	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

$f(x_0)$ est un maximum local.

VI. Règles de dérivation.

1) Dérivées de fonctions usuelles.

Soit f une fonction définie sur Df et f' sa fonction dérivée définie sur Df. On peut établir les formules de dérivation suivantes :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Exemples :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 36 \quad f'(x) = 0$ 2) $f(x) = 4x \quad f'(x) = 4$ 3) $f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$ 4) $f(x) = x^9 \quad f'(x) = 9x^8$

5) $f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ Attention au changement de signe !! 6) $f(x) = \frac{1}{x^5} \quad f'(x) = \frac{-5}{x^{5+1}} = \frac{-5}{x^6}$ (pas obligatoire de la retenir) 7) $f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Fonction	Domaine	Fonction dérivée	Domaine
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$]0\,;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$

2) Opérations et dérivées.

Propriétés (admises) u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

La fonction $u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
La fonction ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)' = ku'$
La fonction uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
Si, pour tout réel x de I, $v(x) \neq 0$, alors : La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples :

1) $f(x) = x^2 + 42x - 36 \quad f'(x) = 2x + 42$

2) $g(x) = 4x^{10} \quad g'(x) = 4 \times 10x^9 = 40x^9 \quad (ku)' = ku'$

3) $f(x) = (2x+3) \times \ln\, x$

f est de la forme $u \times v$ et on va utiliser la formule $(uv)' = u'v + uv'$

On pose : $u(x) = (2x+3) \quad u'(x) = 2$

$v(x) = lnx \quad v'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2 \times lnx + (2x+3) \times \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2lnx + 2x \times \frac{1}{x} + 3 \times \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2lnx + 2 + \frac{3}{x}$

4) $g(x) = \frac{3x-10}{x^2}$ g est de la forme $\frac{u}{v}$ donc on utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ Attention au signe – au numérateur !!!

On pose : $u(x) = (3x-10) \quad u'(x) = 3$

$v(x) = x^2 \quad v'(x) = 2x$

$g'(x) = \frac{3\times x^2 - (3x-10)\times 2x}{(x^2)^2} \quad g'(x) = \frac{3x^2 - (6x^2 - 20x)}{x^4} = \frac{3x^2 - 6x^2 + 20x}{x^4} \quad g'(x) = \frac{-3x^2 + 20x}{x^4} = \frac{x \times (-3x+20)}{x \times x^3}$

$g'(x) = \frac{-3x+20}{x^3}$

Conséquences :

(1) toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(2) toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Exercices :

- Calcul différentiel : pour revoir les acquis +111, 112, 113, 114, 118, 119, 120, 121, 127, 130, 134 (avec ln), ++135 (ln), +140 (avec e^x), 141, ++145, ++152 (ln et calcul formel), ++153 (exp et calcul formel) p185-186