

1. Métropole mai 2019, exercice 2

Partie A : Achat d'un appartement

Un couple souhaite demander un emprunt afin d'acquérir un appartement d'une valeur de 140 000 €. Une première banque leur propose un crédit de 140 000 € au taux mensuel de 0,12 % sur 180 mois remboursable par mensualités constantes.

1. La banque établit le tableau d'amortissement suivant où la cellule C1 est au format pourcentage :

	A	B	C	D	E
1		taux mensuel	0,12 %		
2					
3	Mois	Capital restant dû en début de mois	Intérêts du mois	Amortissement du capital	Mensualité constante
4	1	140 000,00			865,26
5	2				865,26
6	3				865,26
7	4				865,26

- a. Donner les trois formules à saisir en cellules C4, D4 et B5, qui, recopiées vers le bas, permettent de compléter ce tableau.
 b. Calculer les valeurs obtenues en cellules C4, D4 et B5.

2. Quel est le coût total de ce crédit?

Une seconde banque propose au couple des conditions plus avantageuses avec un emprunt de 140 000 € au taux annuel de 1,35 % sur 12 ans.

3. Montrer que le taux moyen mensuel équivalent à ce taux annuel, arrondi au millième, est 0,112 %.

4. On rappelle la formule de calcul d'une mensualité m constante : $m = C \times \frac{t}{1 - (1 + t)^{-n}}$ où C est le capital emprunté, t le taux mensuel et n est le nombre de mensualités.

Sachant que le couple ne peut pas rembourser une mensualité supérieure à 1 000 € par mois, va-t-il pouvoir souscrire cet emprunt? Justifier la réponse.

2. Polynésie mai 2018, exercice 2

Un éleveur possède 80 vaches laitières réparties en deux races distinctes :

- 60 Prim'Holstein
- Abondance.

Ces vaches sont susceptibles de contracter une maladie qui affecte la production de lait :

3 % des vaches Prim' Holstein et 7 % des vaches Abondance sont touchées par cette maladie.

Lors d'un contrôle vétérinaire concernant cette maladie, une vache est choisie au hasard dans l'élevage.

On note :

- A l'évènement « la vache est d'origine Abondance » ;
- M l'évènement « la vache a contracté la maladie ».

On rappelle que si A et B sont deux évènements, \bar{A} désigne l'évènement contraire de A , $P(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A et $P_A(B)$ désigne la probabilité conditionnelle de B sachant A .

Partie A : probabilités conditionnelles

1. a. Justifier que la probabilité de choisir une vache Prim' Holstein est 0,75.
 b. En déduire $P(A)$.
 c. Donner sans justification la valeur des probabilités $P_{\bar{A}}(M)$ et $P_A(M)$.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités.
3. a. Décrire, dans le contexte de l'énoncé, l'événement $A \cap M$ par une phrase.
b. Calculer sa probabilité.
4. Montrer que la probabilité que la vache prélevée ait contracté la maladie est 0,04.
5. Les services vétérinaires ont indiqué à l'éleveur qu'une de ses vaches a contracté la maladie.
L'éleveur déclare : « Il y a plus d'une chance sur deux qu'elle soit de race Abondance ».
A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Partie B : Probabilités continues

On appelle lactation, la période au cours de laquelle une vache produit du lait après la naissance d'un veau.

L'éleveur étudie la quantité de lait produit pendant cette période pour chacune de ses vaches.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque vache prélevée au hasard dans le troupeau, associe cette quantité de lait en kg. On suppose que la variable X suit une loi normale d'espérance 9 300 et d'écart type 800.

Lorsque cela est nécessaire, on donnera les résultats sous forme décimale arrondis au centième.

1. Donner, en kg, la quantité moyenne de lait produit par une vache au cours d'une lactation.
2. Donner la probabilité, qu'au cours d'une lactation, une vache produise une quantité de lait comprise entre 8 500 et 10 100 kg.
3. Une vache est réformée (elle ne peut plus faire partie du troupeau) lorsque sa production descend en dessous de 7 800 kg au cours d'une lactation.
Calculer, sous forme de pourcentage, la proportion de vaches qui pourraient être réformées dans le troupeau.

Partie C : Mathématiques financières

L'éleveur souhaite investir dans un robot pour automatiser la traite de ses vaches. Pour cela il doit souscrire auprès d'une banque un crédit d'un montant de 150 000 € remboursable en 10 annuités constantes au taux annuel de 3,5 %.

On rappelle la formule permettant de calculer le montant d'une annuité constante : $a = C \times \frac{t}{1 - (1 + t)^{-n}}$
où C désigne le capital emprunté, t désigne le taux annuel et n désigne le nombre d'annuités.

1. L'éleveur souhaite rembourser 19 000 € au maximum par an.
Les conditions financières fixées par la banque permettent-elles de respecter cette contrainte ?
2. Quel est le coût total du crédit ?

3. Nouvelle Calédonie Novembre 2018

L'entreprise de menuiserie souhaite lancer la fabrication d'un nouveau modèle de fenêtre de toit à ouverture télécommandée.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

A- Évolution des ventes en fonction du prix unitaire

Le service commercial de l'entreprise a mené une enquête auprès d'un échantillon de clients, de façon à estimer le prix qu'elle peut pratiquer pour commercialiser la fenêtre de toit.

Les résultats sont les suivants :

Prix de vente unitaire en centaines d'euros : x_j	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11
Nombre de fenêtres de toit vendues : y_j	67	64	61	58	55	52	50

1. Pour obtenir un ajustement satisfaisant du nuage de points $M_j(x_j ; y_j)$, on décide d'effectuer le changement de variable : $z = \ln(y)$.
 - a. Compléter le tableau donné dans le **document réponse à rendre avec la copie**, en arrondissant les valeurs de z à 10^{-3} .
 - b. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = ax + b$, où les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-3} .
 - c. En déduire y en fonction de x .

2. Pour cette question, on admet que $y = 150e^{-0,1x}$.

- a. Si le prix de vente unitaire est fixé à 1 180 €, combien de fenêtres de toit l'entreprise peut-elle espérer vendre?
- b. L'entreprise souhaite vendre au moins 40 fenêtres de toit.
À combien doit-elle fixer au maximum le prix de vente unitaire d'une fenêtre de toit? On arrondira la réponse à 10 € près.

B- Recherche d'un plan de financement

Pour mettre en place la fabrication de ce modèle de fenêtre de toit, l'entreprise doit investir dans une nouvelle machine d'une valeur de 40 000 €.

Pour financer cet achat, le gestionnaire contacte deux organismes bancaires A et B.

Un formulaire est proposé enfin d'exercice

1. Proposition de la banque A

La banque A propose un prêt sur 10 mois remboursé en 10 mensualités formant les termes consécutifs d'une suite arithmétique de 1^{er} terme $U_1 = 2000$ et de raison $r = 460$.

On note U_n le montant de la n -ième mensualité versée pour le remboursement de ce prêt.

- a. Montrer que pour tout entier naturel compris entre 1 et 10 on a : $U_n = 1540 + 460n$.
- b. Quel serait le montant du dernier versement?
- c. L'entreprise souhaite connaître le montant total qu'elle devra rembourser dans ce cas.
Afin de répondre à cet objectif, compléter l'algorithme donné dans le **document réponse à rendre avec la copie**.
- d. Déterminer le montant total que devra rembourser l'entreprise si le prêt est contracté auprès de la banque A.

2. Proposition de la banque B

La banque B propose un prêt sur 5 mois remboursé en 5 mensualités constantes au taux annuel de 5,75 %.

- a. Montrer que le taux mensuel équivalent au taux annuel de 5,75 % est d'environ 0,467 %.
- b. Déterminer le montant de la mensualité constante versée dans ce cas, arrondi à 0,01 près.

3. Quelle sera la proposition de prêt la plus avantageuse pour l'entreprise? Justifier.

Formulaire

- On rappelle la formule permettant de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite (u_n) arithmétique :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n.$$

- On rappelle la formule permettant de calculer le montant d'une mensualité constante :

$$a = C \times \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

où C est le montant emprunté, i est le taux mensuel et n le nombre de mensualités.

Ces exercices sont extraits de sujets publiés sur le site de l'APMEP : <https://www.apmep.fr/-BTS-316-sujets->