Chapitre 9 Dérivation partie 1 : le nombre dérivé

Objectifs de ce chapitre (extrait des programmes) :

Contenus

Point de vue local : approche graphique de la notion de nombre dérivé :

- sécantes à une courbe passant par un point donné ; taux de variation en un point ;
- tangente à une courbe en un point, définie comme position limite des sécantes passant par ce point ;
- nombre dérivé en un point défini comme limite du taux de variation en ce point ;
- équation réduite de la tangente en un point.

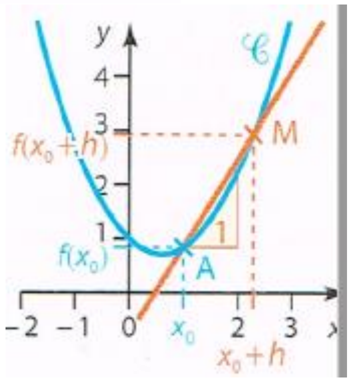
Capacités attendues

- Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- Construire la tangente à une courbe en un point.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.

I. Sécantes et tangentes

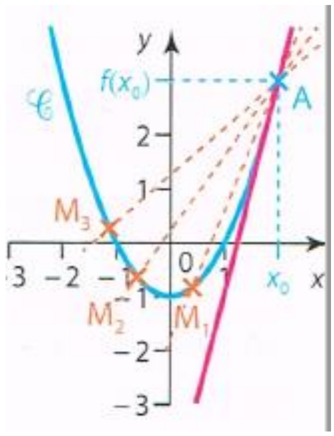
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a\,;b]$, x_0 un nombre appartenant à l'intervalle I et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
h désigne un réel non nul.

DÉFINITION Le **taux de variation** de la fonction f **au point d'abscisse x_0** est le nombre $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. On le note $\tau(h)$.



Rappel : le taux de variation de la fonction f entre les points d'abscisse x_0 et (x_0+h) est le coefficient directeur de la sécante (AM) à la courbe C de f passant par le point A.

DÉFINITION La **tangente** à la courbe $\mathscr{C}$ **au point A d'abscisse x_0** est la droite passant par le point A, position limite des sécantes à la courbe $\mathscr{C}$ passant par A.



Savoir-Faire 1 Calculer un taux de variation en un point

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Calculer le taux de variation de la fonction *f* en $x = 2$.

On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$:

$f(2+h) = (2+h)^2 + 2(2+h) - 3$
$f(2+h) = 4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 3$
$f(2+h) = h^2 + 6h + 5$

$f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$

Donc le taux de variation $\tau(h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$\tau(h) = \frac{h^2 + 6h + 5 - 5}{v}$

$\tau(h) = \frac{6h+h^2}{h}$

$\tau(h) = \frac{h(6+h)}{h}$

$\tau(h) = 6 + h$

Le taux de variation de de la fonction *f* en $x = 2$ est donc $\boldsymbol{\tau(h) = 6 + h}$

Vous pouvez étudier un autre exercice résolu pour le calcul d'un taux de variation en un point dans votre livre à la page 105 (exercice résolu 1).

II Nombre dérivé et équation de tangente

DÉFINITION Le **nombre dérivé** de la fonction f en x_0 est la limite du taux de variation en x_0 lorsque h se rapproche de 0. On le note $f'(x_0)$.

On écrit : $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

PROPRIÉTÉ Le **nombre dérivé** de la fonction f en x_0 est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse x_0.

REMARQUE • Il existe certaines fonctions pour lesquelles le nombre dérivé en x_0 n'existe pas. On dira alors que la fonction n'est pas dérivable en x_0.

PROPRIÉTÉ La **tangente** à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse x_0 est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_0)$. **L'équation réduite** de cette tangente est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

EXEMPLE • Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 3. $f(3) = 10$ donc A(3 ; 10). Soit h un nombre réel non nul. On a : $f(3+h) = 2(3+h)^2 - 3(3+h) + 1 = 2h^2 + 9h + 10$. Donc

$$\tau(h) = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{2h^2 + 9h + 10 - 10}{h} = \frac{h(2h+9)}{h} = 2h + 9.$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2h+9) = 9$ ce qui signifie que $f'(3) = 9$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 3 est donc : $y = 9(x-3) + 10$, soit $y = 9x - 17$.

Savoir-Faire 2 Calculer le nombre dérivé d'une fonction en une abscisse

Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Calculer le nombre dérivé de la fonction *f* en $x = 2$.

1) On commence par calculer le taux de variation comme on l'a fait dans le Savoir-Faire 1.

On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$:

$f(2+h) = (2+h)^2 + 2(2+h) - 3$ $\quad f(2+h) = 4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 3$

$f(2+h) = h^2 + 6h + 5$

$f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$

Donc le taux de variation $\tau(h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ $\quad \tau(h) = \frac{h^2+6h+5-5}{v}$

$\tau(h) = \frac{6h+h^2}{h}$ $\quad \tau(h) = \frac{h(6+h)}{h}$ $\quad \tau(h) = 6 + h$

Le taux de variation de de la fonction *f* en $x = 2$ est donc $\boldsymbol{\tau(h) = 6 + h}$

2) puis on calcule la limite de ce taux quand h tend vers 0

- On calcule la limite de $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ lorsque h tend vers 0 :

Donc : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 6 + h = 6$

Le nombre dérivé de f en a est :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Le nombre dérivé de f en 2 est égal à 6. Et on note f '(2) = 6.

Vous pouvez étudier un autre exercice résolu pour le calcul du nombre dérivé d'une fonction en une abscisse dans votre livre à la page 105 (exercice résolu 2).
Vous pouvez également visionner la vidéo suivante :
https://www.youtube.com/watch?v=UmT0Gov6yyE&feature=youtu.be