Chapitre VIII Loi normale

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Loi normale Loi normale d'espérance μ et d'écart type σ.	• Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre d'une loi normale.	La loi normale peut être introduite à partir de l'observation, à l'aide d'un logiciel, de la loi binomiale. Les élèves doivent connaître l'allure de la courbe de densité, ainsi que sa symétrie. L'expression de la densité de la loi normale n'est pas un attendu du programme. Des exemples issus des autres disciplines montrent que la loi normale permet de modéliser des situations concrètes.

Histoire ; la loi normale est l'une des principales lois de probabilité. Elle permet notamment de modéliser la distribution de nombreuses variables étudiées en statistiques (taille, poids,…).
Le célèbre mathématicien allemand, *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855) conçoit une loi statistique continue, appelée loi normale ou loi de Laplace-Gauss, dont la répartition est représentée par la fameuse courbe en cloche.
L'adjectif « normale » s'explique par le fait que cette loi décrit et modélise des situations statistiques aléatoires concrètes et naturelles.
Prenons par exemple une population de 1000 personnes dont la taille moyenne est de 170 cm. En traçant l'histogramme des tailles, on obtient une courbe en cloche dont la population se concentre essentiellement autour de la moyenne.

I Rappels sur la loi binomiale.

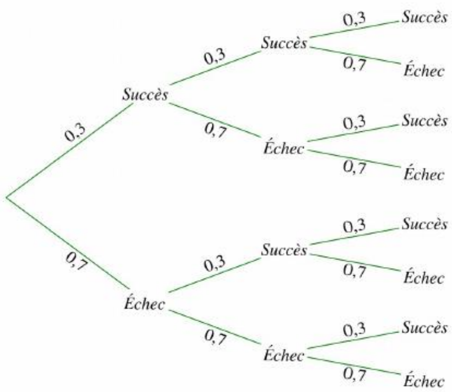
a) Epreuve de Bernoulli.

On répète *n* fois la même expérience, à deux issues possibles (« **épreuve de Bernoulli** »), de manière identique et indépendante (tirage avec remise) :

- Succès, de probabilité p,
- Echec, de probabilité 1-p.

On peut représenter cette situation à l'aide d'un arbre.

Exemple : si $n=3$ et $p=0{,}3$, on a cet arbre :



b) Loi binomiale.

Dans la situation précédemment décrite, soit X la variable aléatoire associée au nombre *k* de succès parmi les *n* expériences.

X prend toutes les valeurs entières entre 0 et *n* .

Propriété (admise) : *Par définition, la loi binomiale de paramètres n et p, notée B(n, p), est la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p*

Remarques :

- Les probabilités se calculent avec la calculatrice ou le tableur (ou à l'aide d'un arbre lorsque n est très petit).
- $P(X=k)$ est la probabilité d'obtenir exactement *k* succès parmi les *n* expériences.
- $P(X\leqslant k)$ est la probabilité d'obtenir au plus *k* succès parmi les *n* expériences.
- $P(X>k)=1-P(X\leqslant k)$ est la probabilité d'obtenir au moins *k+1* succès parmi les *n* expériences.

X prend toutes les valeurs entières entre 0 et *n* .

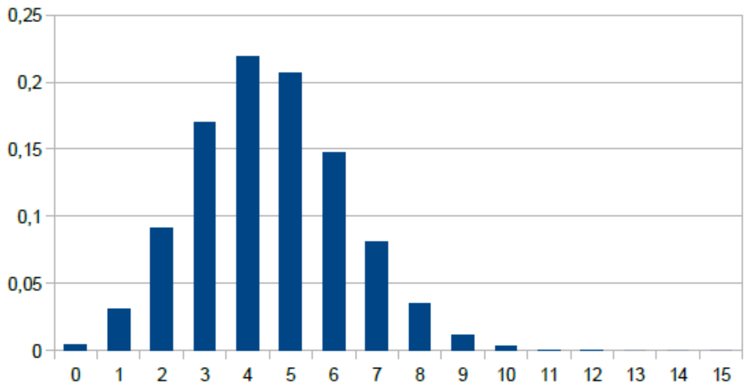
Propriété (admise) : *Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors son espérance est*

$$E(X) = n \times p$$

Exemple : *On lance 15 fois de suite une pièce de monnaie truquée : la probabilité d'obtenir « Pile » sur un lancé est 0,3.*

Soit X *, variable aléatoire égale au nombre de « Piles » obtenus ; on a donc* $X \sim B(15;0,3)$.

On construit un diagramme représentant cette loi : en abscisse, ce sont les valeurs k *de la variable aléatoire* X *(avec* $0 \leqslant k \leqslant 15$ *), et en ordonnée, les probabilités* $P(X=k)$.



On a donc $E(X)=15\times 0,3=4,5$.

Remarque : l'espérance est ce qu'on appelle quelquefois la moyenne, le gain moyen…selon le contexte.

c) Utilisation de la calculatrice.

Exemple : X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.

1. Calculer $P(X=6)$. Probabilité d'obtenir 6 succès.	Mode opératoire avec calculatrice CASIO : • Sélection du menu OPTN au clavier. • Puis sélection de STAT -> DIST -> BINM • **Bpd** Sur la calculatrice **: BinominalPD(6,10,0.4)** *Syntaxe : BinominalPD(k,n,p)* On obtient la valeur : 0.111476736 *On peut également utiliser le menu STATS* *STAT -> DIST -> BINM et Bpd (Data : Variable, x : 6, Numtrial : 10, p : 0,4)*
2. Calculer $P(X \leq 3)$ Probabilité d'obtenir au plus 3 succès.	Mode opératoire avec calculatrice CASIO : • Sélection du menu OPTN au clavier. • Puis sélection de STAT -> DIST -> BINM • **Bcd** Sur la calculatrice **: BinominalCD(3,10,0.4)** *Syntaxe : BinominalCD(k,n,p)* On obtient la valeur : 0.3822806016 *On peut également utiliser le menu STATS* *STAT -> DIST -> BINM et Bcd (Data : Variable, x : 3, Numtrial : 10, p : 0,4)*
2. Calculer $P(X>3)$ Probabilité d'obtenir au moins 4 succès (4>3).	Mode opératoire avec calculatrice CASIO : $P(X>3)=1-p(X \leq 3)$.. Sur la calculatrice **: on tape 1 - puis « BinominalCD(3,10,0.4) »** On obtient la valeur : 0.6177193984 *On peut également utiliser le menu STATS* *STAT -> DIST -> BINM et Bcd (Data : Variable, x : 3, Numtrial : 10, p : 0,4), on trouve* 0.3822806016 et on fait ensuite dans le menu RUN : $1-0.3822806=0{,}6177194$ mais c'est un peu plus long…

Exercice : Calculer les probabilités d'une loi binomiale

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre.

On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirage gagnant.

1) Prouver que X suit une loi binomiale.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

3) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

Solutions :

1) On répète 4 fois **de manière identique et indépendante** une expérience à deux issues : boules gagnantes (5 issues) ; boules perdantes (7 issues).

Le **succès** est d'obtenir une boule gagnante. La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{5}{12}$. Les paramètres de la loi binomiale sont donc : n = 4 et $p = \frac{5}{12}$.

2) Loi de probabilité de X (valeurs obtenues avec la calculatrice Casio (BINM), arrondies au millième).

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,116	0,331	0,354	0,169	0,030

3) Avec la calculatrice, on obtient : $P(X = 3) \approx 0{,}169$

II Loi normale.

a) Espérance et écart-type d'une loi normale.

Propriété et définition (admise) :

* Le diagramme en bâtons d'une loi binomiale de paramètres n et p, lorsque n est très grand et que p n'est pas « voisin » de 0 et de 1, peut être approché par une courbe « en cloche ».
* Cette courbe est celle d'une fonction, appelée densité de probabilité, qui définit une nouvelle loi de probabilité, appelée **loi normale**.

Propriété (admise) : 2 paramètres caractérisent une loi normale :

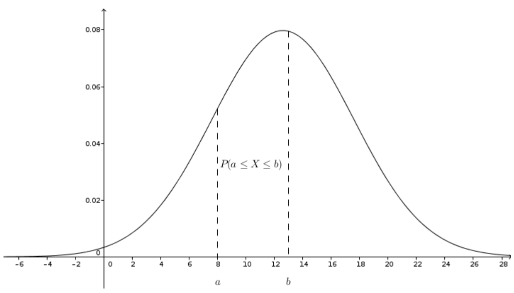
* son espérance µ (se lit « mu ») égale à celle de la loi binomiale qu'elle approche, soit $n \times p$
* son écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ σ se lit « sigma »

Propriété (admise) : La courbe d'une loi normale est symétrique par rapport à la droite x=µ

Remarque :
La courbe est d'autant plus "resserrée" autour de son axe de symétrie que l'écart-type σ est petit.

b) Calcul d'une probabilité avec une loi normale.

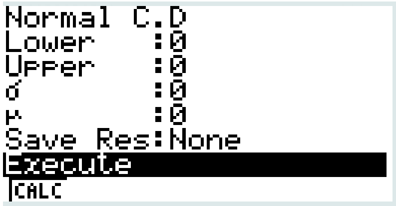
Propriété (admise) : Soit X suivant une loi normale. La probabilité $P(a \leq X \leq b)$ que la variable aléatoire X appartienne à $[a\,;\,b]$ est égale à l'aire du domaine compris entre la courbe de la loi normale, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$

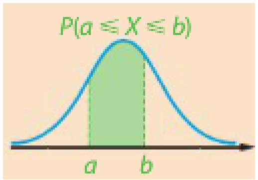


Propriétés (admises) : Soit X suivant une loi normale.

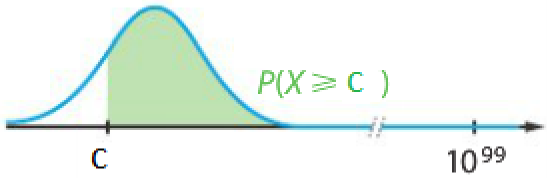
* L'aire sous la courbe de la loi normale est égale à 1.
* Par symétrie de la courbe par rapport à) la droite $x = \mu$, on a $P(X \geq \mu) = 0{,}5 \; et \; P(X \leq \mu) = 0{,}5$.
* $P(X \geq c) = 1 - P(X \leq c)$ et $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$

1. Calculer : $P(a \leq X \leq b)$
   - Dans le menu STAT, on choisit DIST, NORM puis Ncd.
   - On indique les données dans l'ordre : a, b puis σ et μ

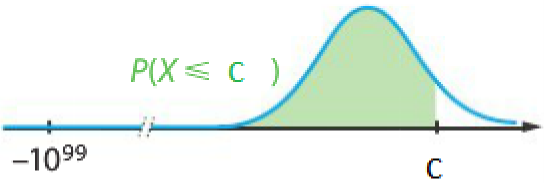




2. Calculer : $P(X \leq c)$
   - Dans le menu Stat, on choisit DIST, NORM puis Ncd.
   - On indique les données dans l'ordre : -10^{99}, c puis σ et μ : on utilise l'approximation avec $P(-10^{99} \leq X \leq c)$ où on néglige $P(-10^{99} \leq X)$.



3. Calculer : $P(X \geq c)$
   - Dans le menu Stat, on choisit DIST, NORM puis Ncd.
   - On indique les données dans l'ordre : c, 10^{99} puis σ et μ : on utilise l'approximation avec $P(c \leq X \leq)$ où on néglige $P(X \leq 10^{99})$.

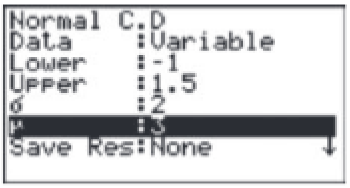


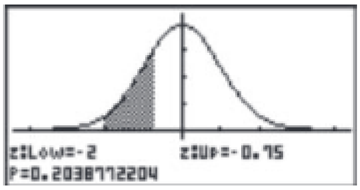
Exemple :

Calculer $P(-1 \leq X \leq 1{,}5)$ avec les paramètres suivants : μ=3 et σ=2

Voici un exemple avec $a = -1$ $b = 1{,}5$

$\mu = 3$ et $\sigma = 2$:





lower : borne inférieure (-1) upper : borne supérieure (1,5)

Savoir-Faire 1 Calculer une probabilité avec une loi normale.

Le poids en kg des nouveaux-nés à la naissance est une variable aléatoire qui peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 3{,}3$ et d'écart type $\sigma = 0{,}5$.

1. Calculez la probabilité qu'un nouveau-né pèse entre 3 et 4 kg.
2. Calculez la probabilité qu'un nouveau-né pèse moins de 2,5 kg.

3. Calculez la probabilité qu'un nouveau né pèse plus de 5kg.

Solutions :

1. $P(3 \leq X \leq 4) \approx 0.64499022$ (menu STAT – DIST- NORMCD, Lower : 3, Upper : 4, σ: 0,5 µ:3,3). La probabilité qu'un nouveau né pèse entre 3 et 4 kg est d'environ 64,49%.

2. $P(X \leq 2{,}5)$ ≈0,055 à 10^{-3}près (approximation avec $P(-10^{99} \leq X \leq 2{,}5)$ ici sur la calculatrice, on met lower : -10^99 et upper : 2,5
La probabilité qu'un nouveau né pèse moins de 2,5 kg kg est d'environ 5,5%.

3. $P(X \geq 5)$: Sur la calculatrice, on met lower : 5, upper : 10^99 et on a le résultat : 3,3693ᴱ-04 cela veur dire $3{,}3693 \times 10^{-4} = 0{,}000\,33693$ et si on arrondit à 5 décimales, on trouve 0,00034
$P(X \geq 5)$ ≈0,00034 à 10^{-5}près (approximation avec $P(5 \leq X \leq 10^{99}$. La probabilité qu'un nouveau né pèse plus de 5 kg est d'environ 0,034%.

Exemples :

Exercice 1. On définit la loi normale avec de moyenne $\mu = 170$ et d'écart type $\sigma = 10$. X mesure la taille d'un individu en centimètres.

1. Calculer $p(165 \leq X \leq 185)$: calculatrice lower 165 upper : 185 $\sigma = 10$ $\mu = 170$

On trouve $p(165 \leq X \leq 185) \approx 0{,}3829$ on aurait 38,29% de personnes mesurant entre 165 et 185 cm.

2. Calculer $p(X \leq 200)$: calculatrice lower : -10^99 upper :200 $\sigma = 10$ $\mu = 170$

On trouve $p(X \leq 200) \approx 0{,}9986$ on aurait 99,86% de personnes mesurant mois de 200 cm, soit moins de 2 mètres.

3. Calculer $p(X \geq 150)$: calculatrice lower : 150 upper : 10^99 $\sigma = 10$ $\mu = 170$

On trouve $p(X \geq 150) \approx 0{,}9772$ on aurait 97,72% de personnes mesurant plus de 1,50 mètre.

Exercice 2. Une entreprise fabrique des gélules vides pour l'industrie pharmaceutique. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque gélule prise au hasard, associe sa masse exprimée en milligrammes. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 66$ et d'écart type $\sigma = 0{,}4$

1. Une gélule est considérée comme conforme si sa masse est comprise entre 65mg et 67 mg.

   a. Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité, qu'une gélule prise au hasard soit conforme.

   b. En déduire la probabilité qu'une gélule prise au hasard ne soit pas conforme.

2. a. Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité $p(X \geq 66{,}5)$

   b. Combien y-a-t-il approximativement de gélules de masse supérieure à 66,5 mg dans un lot de 500 gélules ?

Voici les réponses : je vous laisse vérifier vos résultats et me poser vos questions si besoin.

1. a. $p(65 \leq X \leq 67) \approx 0{,}9876$

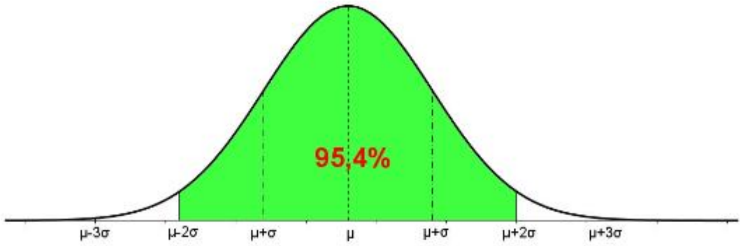
   b. la probabilité p est : $p = 1 - 0{,}9876 = 0{,}0124$

2. a. $p(X \geq 66{,}5) \approx 0{,}1056$

   b. nombre de pilules : $500 \times 0{,}1056 = 52{,}8$ On peut considérer qu'il y a 52 pilules de masse supérieure à 66,5 mg.

c) Intervalle de fluctuation.

Propriété (admise) : Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ. Alors, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$. L'intervalle $[\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma]$ est appelé « intervalle de fluctuation au seuil 95% ».



Exemple : Si X suit une loi normale de paramètres $\mu = 3{,}3$ et d'écart type $\sigma = 0{,}5$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est : $\mu - 2\sigma = 3{,}3 - 2 \times 0{,}5 = 2{,}3 \quad \mu + 2\sigma = 3{,}3 + 2 \times 0{,}5 = 4{,}3$
Donc l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est : $I = [2{,}3\ ;\ 4{,}3]$. On peut donc déduire la probabilité suivante : $p(2{,}3 \leq X \leq 4{,}3) \approx 0{,}95$

Savoir-Faire 2 Utiliser un intervalle de fluctuation.

a) En France, la taille des femmes suit une loi normale d'espérance 163cm et d'écart-type 6cm.
On choisit une femme au hasard.
Quelle est la probabilité que cette femme mesure entre 151 et 175 cm ?

b) Une usine fabrique des boulons en aluminium. Un boulon est de taille conforme lorsque son diamètre est compris entre 29,8 mm et 30,2 mm.
La probabilité qu'un boulon prélevé au hasard soit conforme est égale à 0,95.
La variable aléatoire X, donnant le diamètre d'un boulon, suit une loi normale d'espérance 30 et d'écart-type σ.
Calculer σ.

Solutions :

a) On remarque que : $\mu - 2\sigma = 163 - 2 \times 6 = 151$ et $\mu + 2\sigma = 163 + 2 \times 6 = 175$

donc $P(151 \leq X \leq 175) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$

95,4% des femmes mesurent entre 151cm et 175cm.

b) On a : $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(30 - 2\sigma \leq X \leq 30 + 2\sigma) \approx 0{,}954$

Et on a également : $P(29{,}8 \leq X \leq 30{,}2) \approx 0{,}954$

Et ainsi par exemple : $30 + 2\sigma = 30{,}2$ soit :

$$2\sigma = 30{,}2 - 30 = 0{,}2$$

$$\sigma = 0{,}1$$